Odhad chyby: **def**: **globální chyba metody**: $e_n = y(x_n) - y_n$

Def: **Lokální diskretizační chyba**: $\tau(x,h) = \frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y(x),h)$

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{h} - \Phi(x_n,y_n,h) = 0$$

(jak přesně odpovídá JKM té ODR $y' - f(x,y) = 0$)

- dosadím přesné řešení do metody, dostanu chybu. Typicky odpovídá členům zanedbaným v odvození.

Př: **Eulerova metoda** $\tau(x,h) = \frac{1}{2} h\, y''(\xi_x)$, podstatné je $O(h)$.

Heun: $\tau = O(h^2)$

Def: JKM je **řádu p**, pokud $\exists K, h_0 > 0$: $|\tau(x,h)| \le K h^p$, $\forall x \in [a,b]$, $\forall h \in (0,h_0)$.

Lemma: JKM je konzistentní $\iff \lim_{h\to 0+} \tau(x,h) = 0 \quad \forall x$.

Dk: "$\Rightarrow$" $\tau(x,h) = \underbrace{\frac{y(x+h)-y(x)}{h}}_{\to y'(x)} - \underbrace{\Phi(x,y(x),h)}_{\to f(x,y(x))} \longrightarrow 0$

"$\Leftarrow$" $\underbrace{\tau(x,h)}_{\to 0} = \underbrace{\frac{y(x+h)-y(x)}{h}}_{\to y'(x) = f(x,y(x))} - \underbrace{\Phi(x,y(x),h)}_{\to \Phi(x,y(x),0)} \longrightarrow 0 \Rightarrow f(x,y(x)) = \Phi(x,y(x),0)$

Věta: Nechť Φ je Lip. spoj. vzhledem ke y: $|\Phi(x,y,h) - \Phi(x,\tilde{y},h)| \le L|y-\tilde{y}|$ $\forall x,y,\tilde{y},h$. Nechť $|\tau(x,h)| \le K h^p$ (řád p). Pak

$$\max_{a \le x_n \le b} |y(x_n) - y_n| \le K h^p \frac{e^{L(b-a)}-1}{L}.$$

Dk:

$$\left.\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + h\,\Phi(x_n,y_n,h) \\ y(x_{n+1}) &= y(x_n) + h\,\Phi(x_n,y(x_n),h) + h\,\tau(x_n,h) \end{aligned}\right\} \text{odečtu}$$

$$\underbrace{y(x_{n+1}) - y_{n+1}}_{e_{n+1}} = \underbrace{y(x_n) - y_n}_{e_n} + h\Big[\underbrace{\Phi(x_n,y(x_n),h) - \Phi(x_n,y_n,h)}_{|\cdot| \le L|y(x_n)-y_n| = L|e_n|}\Big] + h\underbrace{\tau(x_n,h)}_{|\cdot| \le K h^p}$$

$$\Rightarrow \boxed{|e_{n+1}| \le (1+hL)|e_n| + K h^{p+1}}$$

$$|e_{n+1}| \le (1+hL)|e_n| + Kh^{p+1}$$

$$\le (1+hL)\left[(1+hL)|e_{n-1}| + Kh^{p+1}\right] + Kh^{p+1} = (1+hL)^2|e_{n-1}| + Kh^{p+1}\left((1+hL)+1\right)$$

$$\vdots$$

$$\le \cancel{(1+hL)^{n+1}\underbrace{|e_0|}_{0}} + Kh^{p+1}\underbrace{\sum_{j=0}^{n}(1+hL)^j}_{\text{geom. řada}} = Kh^{p\cancel{+1}}\frac{(1+hL)^{n+1}-1}{(\cancel{1}+hL)\cancel{-1}} = (*)$$

$$\left|\begin{array}{l} 1+hL \le e^{hL} = 1+hL+\dots \\ (1+hL)^{n+1} \le e^{hL(n+1)} \le e^{L(b-a)} \end{array}\right.$$

$$x_n = a+nh \Rightarrow nh = x_n - a \le b-a$$

$$\boxed{(*) \le Kh^p\,\frac{e^{L(b-a)}-1}{L}}$$

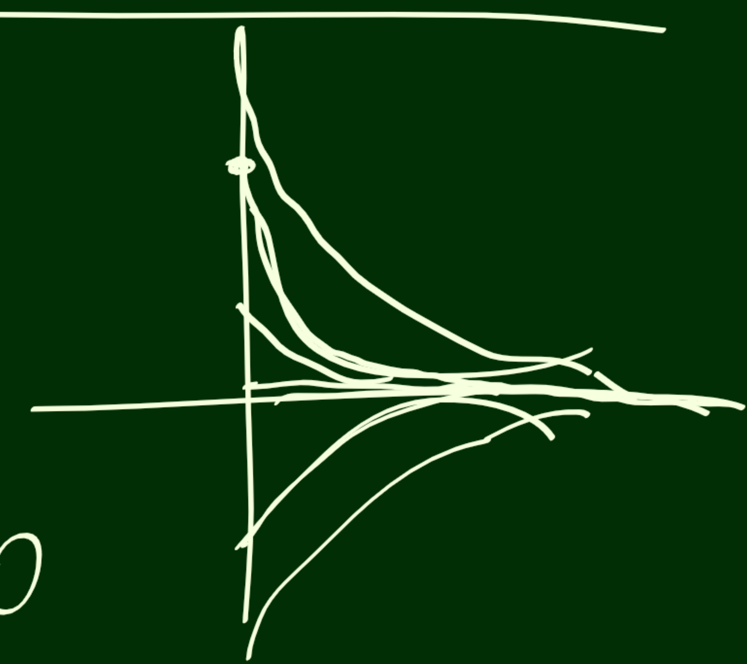
Def: JKM je konvergentní, pokud $\max_{a\le x_n\le b}|y(x_n)-y_n| \to 0$ pro $h\to 0$.

Věta: Φ Lip. vzhledem k y. Pak JKM konzistentní $\Leftrightarrow$ konvergentní.

Dk: "$\Rightarrow$" jako v minulé větě: $\max_n |e_n| \le \underbrace{\max_n|\tau(x_n,h)|}_{\to 0 \text{ pro konzistentní metodu}}\cdot\frac{e^{L(b-a)}-1}{L}$

"$\Leftarrow$" jinak bych řešil jinou rovnici.

A-stabilita (absolutní stabilita)



Př: $y' = -10y \Rightarrow y(x) = y_0 e^{-10x}$, $y_0 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$

- nestabilita – Euler. · řešení se přibližují: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n) \\ y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n,y_n) + h\tau(x_n,h) \end{array}\right\} e_{n+1} = e_n + h\Big[\underbrace{f(x_n,y(x_n)) - f(x_n,y_n)}_{=\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,\xi_n)\cdot e_n}\Big] + h\tau(x_n,h)$$

$$\Rightarrow e_{n+1} = \underbrace{\left(1+h\frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{A\text{ – amplifikační faktor}} e_n + h\tau(x_n,h)$$

Chceme, že $e_n \not\to \infty$ exponenciálně, tj. $|A|<1$ – podmínka stability.
Pro $|A|>1$ expon. nárůst chyb, num. řešení.

Def: JKM je A-stabilní, pokud $|A|<1$ pro problémy s $\frac{\partial f}{\partial y}<0$.

$|A| = \left|1+h\frac{\partial f}{\partial y}(x_n,\xi_n)\right| < 1 \Leftrightarrow h\frac{\partial f}{\partial y} \in (-2,0)$, tj. $h < \frac{-2}{\frac{\partial f}{\partial y}}$ $\left(h<\frac{1}{5}\right)$

Podmíněná stabilita.

Implicitní Euler je nepodmíněně A-stabilní.

Konstrukce metod: JKM, vyšší řády.

Metody založené na Taylorovi: $y(x+h) = y(x) + h\underbrace{y'(x)}_{f(x,y)} + \frac{h^2}{2}\underbrace{y''(x)}_{(*)} + \cancel{\frac{h^3}{6}y'''(\xi)}$

$(*)$: $(y'(x))' = \frac{d}{dx} f(x,y(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\cdot \underbrace{y'(x)}_{=f(x,y(x))}$

$y_{n+1} = y_n + h f(x_n,y_n) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_n,y_n)\cdot f(x_n,y_n)\right]$

$\tilde{\Phi}(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot f(x,y)\right]$

- Konzistentní, $\tau = O(h^2)$ - 2. řádu.
- Nepraktické - musím znát $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$, pro vyšší řády složité vzorce.

Runge-Kuttovy metody (Kutta): Euler - 1 vyhodnocení f - 1. řád, víc vyhodnocení f = vyšší řád?!

$K_1 = f(x,y)$, $K_2 = f(x+\alpha h, y+\beta h K_1)$

def $\Phi(x,y,h) = w_1 K_1 + w_2 K_2$ ~ viz Heun

Chci α, β, w_1, w_2, aby 2. řád.

Chci $\frac{y(x+h)-y(x)}{h} - \Phi(x,y,h) = \tau(x,y) = O(h^2)$. Vím to pro $\tilde{\Phi}$ výše.

$\tilde{\Phi}(x,y,h) = f(x,y) + \frac{h}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) f(x,y)\right)$

Když $\Phi - \tilde{\Phi} = O(h^2)$ jsem hotov.

$\Phi(x,y,h) = w_1 f(x,y) + w_2 f(x+\alpha h, y+\beta h f(x,y)) \overset{\text{Taylor}}{=}$

$= w_1 f(x,y) + w_2\left[f(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\alpha h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot \beta h f(x,y) + O(h^2)\right]$

Porovnání koeficientů s $\tilde{\Phi}$:

$f: \quad 1 = w_1 + w_2$

$\frac{\partial f}{\partial x}: \quad \frac{\cancel{h}}{2} = w_2 \alpha \cancel{h}$

$\frac{\partial f}{\partial y} f: \quad \frac{\cancel{h}}{2} = w_2 \beta \cancel{h}$

zvol w_2, pak $w_1 = 1 - w_2$, $\alpha = \frac{1}{2w_2}$, $\beta = \frac{1}{2w_2}$

$w_2 = \frac{1}{2}$ = Heun. $\quad w_2 = 1$ = "Vylepšený Euler"

$w_2 = \frac{3}{4}$ – Ralstonova metoda – nejlepší konstanta v $O(h^2)$

Obecné Runge-Kutta metody: $\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{s} w_i k_i$,

kde
$$\left.\begin{aligned}
k_1 &= f(x,y) \\
k_2 &= f(x+\alpha_2 h,\, y + \beta_{21} h k_1) \\
&\vdots \\
k_i &= f\Big(x+\alpha_i h,\, y + h \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} k_j\Big) \\
&\vdots \\
k_s &= \dots
\end{aligned}\right\} \text{ stages, } s\text{-stage metoda.}$$

Explicitní metoda, v praxi $s = 4$ – 4. řádu.